О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ВИДА $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_kx\|^p$

И. С. Фещенко

Пусть X, Y_k, $k\geqslant 1$ – линейные нормированные пространства (ЛНП) над $\mathbb{R}$, $A_k: X\to Y_k$, $j\geqslant 1$ – линейные непрерывные операторы. Для $p\in[1,\infty]$ определим множество

$$\mathbf{D}_p=\{x\in X\mid(\|A_1x\|,\|A_2x\|,\ldots)\notin l_p\}.$$

В работе изучается вопрос о плотности $\mathbf{D}_p$ в X при заданой последовательности $\|A_k\|$, $k\geqslant 1$.

Далее под ЛНП мы понимаем ЛНП над $\mathbb{R}$. Относительно ЛНП над $\mathbb{C}$ см. замечание 2. Для ЛНП X, Y обозначим $\mathcal{L}(X,Y)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A: X\to Y$. Пусть $p\in[1,\infty]$, $n\in\mathbb{N}$. Для $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $x_k\in\mathbb{R}$ определим $\|x\|_p=(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{1/p}$ (если $p=\infty$, то $\|x\|_\infty=\max_k|x_k|$). Для $x=(x_1,x_2,\ldots)$, $x_k\in\mathbb{R}$ определим $\|x\|_p=(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}$ (если $p=\infty$, то $\|x\|_\infty=\sup_k|x_k|$). Напомним определение пространства M-котипа p (см., например, раздел 4.2 книги [1]).

Определение 0.1. Пусть $p\in[1,\infty)$. Говорят, что ЛНП X имеет M-котип p если существует $\gamma>0$, такое, что для произвольного $n\in\mathbb{N}$, произвольных $x_1,\ldots,x_n\in X$ существуют $\varepsilon_k\in\{\pm1\}$, $1\leqslant k\leqslant n$, такие, что

$$\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_kx_k\|\geqslant\gamma\|(\|x_1\|,\|x_2\|,\ldots)\|_p.$$

Если это условие выполнено, то говорят, что X имеет M-котип p с константой γ.

Аналогично можно дать определение пространства, имеющего M-котип ∞, но, как легко видеть, что произвольное ЛНП X имеет M-котип ∞. Хорошо известно (и это легко доказать), что если X конечномерно, то оно имеет M-котип 1; если X гильбертово, то оно имеет M-котип 2. Если $(T,\mathcal{F},\mu)$ –измеримое пространство и $X=L_p(T,\mathcal{F},\mu)$ ($1\leqslant p<\infty$), то оно имеет M-котип $\max(2,p)$ (см. например раздел 4.2 книги [1]).

Теорема 0.1. *Пусть X – банахово пространство, X^* имеет M-котип $\rho\in[1,\infty)$, Y_k, $k\geqslant 1$ – ЛНП, $A_k\in\mathcal{L}(X,Y_k)$, $k\geqslant 1$. Пусть $p\in[1,\rho/(\rho-1)]$ (считаем, что $1/0=\infty$). Определим $r\in[\rho,\infty]$ равенством $1/p-1/r=1-1/\rho$.*

Если $(\|A_1\|,\|A_2\|,\ldots)\notin l_r$, то множество $\boldsymbol{D}_p$ плотно в X.

Для доказательства нам нужны некоторые определения и лемма. Пусть $n\in\mathbb{N}$, X_k, $1\leqslant k\leqslant n$ – ЛНП. Для $s\in[1,\infty]$ определим ЛНП

$$l_s(X_1,\ldots,X_n)=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\mid x_k\in X_k\},$$

$\|x\|_s = \|(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)\|_s$. Несложно проверить, что если $s \in [1, \infty)$, то $(l_s(X_1, \dots, X_n))^* = l_t(X_1^*, \dots, X_n^*)$, где $t \in (1, \infty]$ таково, что $1/s + 1/t = 1$. Тут действие $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ на $x = (x_1, \dots, x_n)$ определено равенством $x^*(x) = \sum_{k=1}^n x_k^*(x_k)$.

Пусть X_k, $k \geqslant 1$ – ЛНП. Для $s \in [1, \infty]$ определим ЛНП

$$l_s(X_1, X_2, \dots) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in X_k, \|(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots)\|_s < \infty\},$$

$\|x\|_s = \|(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots)\|_s$. Несложно проверить, что если $s \in [1, \infty)$, то $(l_s(X_1, X_2, \dots))^* = l_t(X_1^*, X_2^*, \dots)$, где $t \in (1, \infty]$ таково, что $1/s + 1/t = 1$. Тут действие $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ на $x = (x_1, x_2, \dots)$ определено равенством $x^*(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k^*(x_k)$.

Лемма 0.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n$ – ЛНП, Y имеет M-котип $\rho \in [1, \infty)$ с константой γ, $A_k \in \mathcal{L}(X_k, Y)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть $q \in [\rho, \infty]$. Определим оператор $B : l_{n,q}(X_1, \dots, X_n) \to Y$ равенством $B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n A_k x_k$. Тогда*

$$\|B\| \geqslant \gamma \|(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|)\|_r,$$

где $r \in [\rho, \infty]$ такое, что $1/q + 1/r = 1/\rho$.

Доказательство. Если $A_1 = \ldots = A_n = 0$, то нужное утверждение очевидно. Далее не все A_k нулевые. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Существуют $x_k \in X_k$, $\|x_k\| = 1$, такие, что $\|A_k x_k\| \geqslant \|A_k\|/(1 + \delta)$. Пусть α_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ – неотрицательные числа, которые мы выберем позже. Тогда $\|A_k(\alpha_k x_k)\| \geqslant (\alpha_k \|A_k\|)/(1+\delta)$. Поскольку Y имеет M-котип ρ с константой γ, то существуют $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, такие, что

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_k(\alpha_k x_k)\| &\geqslant \gamma \|(\|A_1(\alpha_1 x_1)\|, \dots, \|A_n(\alpha_n x_n)\|)\|_\rho \geqslant \\ &\geqslant \gamma (1 + \delta)^{-1} \|(\alpha_1 \|A_1\|, \dots, \alpha_n \|A_n\|)\|_\rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $x = (\varepsilon_1 \alpha_1 x_1, \dots, \varepsilon_n \alpha_n x_n) \in l_{n,q}(X_1, \dots, X_n)$, тогда из неравенства (1) следует $\|Bx\| \geqslant \gamma (1 + \delta)^{-1} \|(\alpha_1 \|A_1\|, \dots, \alpha_n \|A_n\|)\|_\rho$. Поскольку $\|x\| = \|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_q$, то

$$\|B\| \geqslant \gamma (1 + \delta)^{-1} \frac{\|(\alpha_1 \|A_1\|, \dots, \alpha_n \|A_n\|)\|_\rho}{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_q}. \tag{2}$$

Если $q \in (\rho, \infty)$, то $r \in (\rho, \infty)$. Подставим $\alpha_k = \|A_k\|^{r/q}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ в неравенство (2). Тогда, учитывая, что $1/\rho = 1/q + 1/r$, получим

$$\|B\| \geqslant (1 + \delta)^{-1} \|(\|A_1, \dots, \|A_n\|)\|_r. \tag{3}$$

Если $q = \rho$, то $r = \infty$. Пусть $\|A_i\| = \max_k \|A_k\|$. Подставив $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0, j \neq i$ в (2), получим (3).

Если $q = \infty$, то $r = \rho$. Подставив $\alpha_k = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ в (2), получим (3).

Поскольку $\delta > 0$ произвольно, то из неравенства (3) следует нужное утверждение. Лемма доказана.

Доказательство.(теоремы 0.1) Сначала покажем, что $\mathbf{D}_p$ непусто. Если $\rho = 1, p = \infty$, то $r = \infty$ и непустота $\mathbf{D}_p$ является следствием принципа равномерной ограниченности (его доказательство такое же, как и в случае $Y_k = Y$, $k \geqslant 1$). Далее $p < \infty$. Для $n \geqslant 1$ определим оператор $B_n : X \to l_p(Y_1, Y_2, \dots)$ равенством $B_n x = (A_1 x, \dots, A_n x, 0, \dots)$.

Пусть q таково, что $1/p+1/q=1$. Тогда $B_n^*: l_q(Y_1^*,Y_2^*,\ldots)\to X^*$. Поскольку для произвольных $y^*=(y_1^*,y_2^*,\ldots), x\in X$

$$B_n^* y^*(x)=y^*(B_n x)=\sum_{k=1}^{n} y_k^*(A_k x)=(\sum_{k=1}^{n} A_k^* y_k^*)x,$$

то $B_n^*(y_1^*,y_2^*,\ldots)=\sum_{k=1}^{n} A_k^* y_k^*$. Поскольку $1/p-1/r=1-1/\rho$, $1/p+1/q=1$, то $1/q+1/r=1/\rho$. Пусть X^* имеет M-котип ρ с константой γ. Из леммы 0.1 следует, что $\|B_n\|\geqslant\gamma\|(\|A_1^*\|,\ldots,\|A_n^*\|)\|_r=\gamma\|(\|A_1\|,\ldots,\|A_n\|)\|_r$. Поскольку $(\|A_1\|,\|A_2\|,\ldots)\notin l_r$, то $\sup_n\|B_n\|=\infty$. Как следствие принципа равномерной ограниченности получаем, что D_p непусто.

Покажем, что $\mathbf{D}_p$ плотно в X. Пусть $x_0\in D_p$. Обозначим $\mathbf{C}_p=X\setminus D_p=\{x\in X\mid(\|A_1x\|,\|A_2x\|,\ldots)\notin l_p\}$. Ясно, что $\mathbf{C}_p$ – линейное множество. Пусть $x\in X$. Тогда не более чем для одного действительного λ элемент $x+\lambda x_0\in\mathbf{C}_p$ (иначе $x_0\in\mathbf{C}_p$). Отсюда следует, что $\mathbf{D}_p$ плотно в X. Теорема доказана.

Приведём несколько примеров, в которых условие $(\|A_1\|,\|A_2\|,\ldots)\notin l_r$ необходимо для того, чтобы $\mathbf{D}_p$ было плотно в X. Более точно, в этих примерах для произвольной последовательности неотрицательных чисел $a_k, k\geqslant 1$, таких, что $(a_1,a_2,\ldots)\in l_r$ мы построим операторы $A_k\in\mathcal{L}(X,Y_k)$, для которых $\|A_k\|=a_k, k\geqslant 1$ и $\mathbf{D}_p=\varnothing$.

Пример 0.1. Пусть $X=\mathbb{R}$, тогда $X^*=\mathbb{R}$. Тогда $\rho=1$, $r=p$. Пусть неотрицательные числа a_k таковы, что $(a_1,a_2,\ldots)\in l_r$. Определим $A_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ так: $A_k x=a_k x, x\in\mathbb{R}$. Тогда $\|A_k\|=a_k, k\geqslant 1$ и $\mathbf{D}_p=\varnothing$.

Пример 0.2. Пусть $s\in(1,2]$, $X=l_s$. Тогда $X^*=l_{s'}$, где число $s'\in[2,\infty)$ определено равенством $1/s+1/s'=1$. Поэтому $\rho=s'$. Для $p\in[1,s]$ r определено равенством $1/p-1/r=1/s$. Пусть неотрицательные числа a_k таковы, что $(a_1,a_2,\ldots)\in l_r$. Определим операторы $A_k: l_s\to\mathbb{R}$ так: $A_k(x_1,x_2,\ldots)=a_k x_k$. Тогда $\|A_k\|=a_k, k\geqslant 1$. Для $x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_s$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k x\|^p=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k|x_k|)^p.$$

Поскольку $(a_1,a_2,\ldots)\in l_r$, $(|x_1|,|x_2|,\ldots)\in l_s$ и $1/r+1/s=1/p$, то для произвольного $x\in l_s$ $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k x\|^p<\infty$. Отсюда $\mathbf{D}_p=\varnothing$.

Пример 0.3. Пусть $s\in[2,\infty)$, $X=L_s([0,1],dx)$ (далее пишем просто L_s). Тогда $X^*=L_{s'}$, где число $s'\in(1,2]$ определено равенством $1/s'+1/s=1$. Поэтому $\rho=2$. Для $p\in[1,2]$ r определено равенством $1/p-1/r=1/2$. Пусть неотрицательные числа a_k таковы, что $(a_1,a_2,\ldots)\in l_r$. Обозначим $r_k(t)=sign\sin 2^k t$, $t\in[0,1], k\geqslant 1$ (функции Радемахера). Хорошо известно, что $r_k(t), k\geqslant 1$ – ортонормированная система в L_2. Определим операторы $A_k: L_s\to\mathbb{R}$ так:

$$A_k x=a_k(x,r_k)=a_k\int_0^1 x(t)r_k(t)\,dt.$$

Поскольку $|A_k x| \leqslant a_k\|x\|_{L_1} \leqslant a_k\|x\|_{L_s}$, то $\|A_k\| \leqslant a_k$. Но $A_k r_k = a_k$ и $\|r_k\|_{L_s} = 1$, поэтому $\|A_k\| = a_k$. Для $x \in L_s$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k x|^p = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k |(x, r_k)|)^p.$$

Поскольку $L_s \subset L_2$, то $(|(x,r_1)|, |(x,r_2)|, \dots) \in l_2$. Кроме того, $(a_1, a_2, \dots) \in l_r$ и $1/2 + 1/r = 1/p$, поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k x|^p < \infty$. Таким образом, $\mathbf{D}_p = \varnothing$.

Теорема 0.2. *Пусть X – банахово пространство, X^* имеет M-котип $\rho \in [1,\infty)$, Y_k, $k \geqslant 1$ – ЛНП, $A_k \in \mathcal{L}(X, Y_k)$, $k \geqslant 1$. Пусть $p_0 \in (1, \rho/(\rho-1)]$. Определим $r_0 \in (\rho, \infty]$ равенством $1/p_0 - 1/r_0 = 1 - 1/\rho$.*

Если $(\|A_1\|, \|A_2\|, \dots) \notin l_r$ для всех $r \in [\rho, r_0)$, то $\bigcap_{p \in [1,p_0)} \boldsymbol{D}_p$ плотно в X.

Замечание 1. Поскольку $\mathbf{C}_p \subset \mathbf{C}_{p'}$ для $p < p'$, то $\bigcup_{p\in[1,p_0)} \mathbf{C}_p$ – линейное множество. Поэтому $\bigcap_{p\in[1,p_0)} \mathbf{D}_p = X \setminus \bigcup_{p\in[1,p_0)} \mathbf{C}_p$ плотно X тогда и только тогда, когда $\bigcup_{p\in[1,p_0)} \mathbf{C}_p \neq X$ (см. окончание доказательства теоремы 0.1). При выполнении условий теоремы 0.2 $\mathbf{C}_p \neq X$, $p \in [1, p_0)$. Кроме того, множества $\mathbf{C}_p$ линейны и $\mathbf{C}_p \subset \mathbf{C}_{p'}$ при $p < p'$. Однако из этих условий на $\mathbf{C}_p$, вообще говоря, не следует, что $\bigcup_{p\in[1,p_0)} \mathbf{C}_p \neq X$. Это показывает следующий пример. Пусть X – бесконечномерное ЛНП, E – базис Гамеля для X. Выделим в E счётную последовательность e_k, $k \geqslant 1$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим линейное множество L_n как линейную оболочку векторов $E \setminus \{e_k,\, k > n\}$. Тогда $L_n \neq X$, $L_n \subset L_{n'}$ при $n < n'$, но $\bigcup_n L_n = X$.

Доказательство.(теоремы 0.2) Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\bigcap_{p\in[1,p_0)} \mathbf{D}_p$ непусто. Выберем возрастающую последовательность $p_k \in [1, p_0)$, $k \geqslant 1$, такую, что $p_k \to p_0$, $k \to \infty$. Пусть $n_1 < n_2 < \dots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, которую мы выберем позже. Определим ЛНП

$$Y = l_1(l_{p_1}(Y_1, \dots, Y_{n_1}), l_{p_2}(Y_{n_1+1}, \dots, Y_{n_2}), \dots).$$

Таким образом, Y состоит из элементов $y = (y_1, y_2, \dots)$, $y_k \in Y_k$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|(\|y_{n_{k-1}+1}\|, \dots, \|y_{n_k}\|)\|_{p_k} < \infty$. Для $k \geqslant 1$ определим линейный непрерывный оператор $B_k : X \to Y$ равенством

$$B_k x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_{k-1}}, A_{n_{k-1}+1} x, \dots, A_{n_k} x, 0, \dots).$$

Пусть q_k такое, что $1/p_k + 1/q_k = 1$. Тогда

$$Y^* = l_\infty(l_{q_1}(Y_1^*, \dots, Y_{n_1}^*), l_{q_2}(Y_{n_1+1}^*, \dots, Y_{n_2}^*), \dots)$$

состоит из элементов $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots)$, $y_k^* \in Y_k^*$, таких, что

$$\sup_{k\geqslant 1} \|(\|y_{n_{k-1}+1}^*\|, \dots, \|y_{n_k}^*\|)\|_{q_k} < \infty.$$

Легко видеть, что $B_k^* : Y^* \to X^*$ имеет вид $B_k^*(y_1^*, y_2^*, \dots) = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} A_k^* y_k^*$. Пусть X^* имеет M-котип ρ с постоянной γ. Из леммы 0.1 следует, что $\|B_k^*\| \geqslant \|(\|A_{n_{k-1}+1}^*\|, \dots, \|A_{n_k}^*\|)\|_{r_k}$, где r_k такое, что $1/q_k + 1/r_k = 1/\rho$. Поскольку $1/p_k + 1/q_k = 1$, то $1/p_k - 1/r_k = 1 - 1/\rho$.

Поскольку $p_k < p_0$, то $r_k < r_0$, $k \geqslant 1$. По условию теоремы $(\|A_1\|, \|A_2\|, \ldots) \notin l_r$, $r \in [\rho, r_0)$, поэтому последовательность n_k можно выбрать так, чтобы $\|(\|A_{n_{k-1}+1}\|, \ldots, \|A_{n_k}\|)\|_{r_k} \geqslant k$. Тогда $\sup_k \|B_k\| = \infty$, и, как следствие принципа равномерной ограниченности, существует $x_0 \in X$, для которого $\sup_k \|B_k x_0\| = \infty$.

Покажем, что $x_0 \in \bigcap_{p \in [1,p_0)} \mathbf{D}_p$. Предположим, существует $p \in [1, p_0)$, такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_0\|^p < \infty$. Выберем N так, чтобы $\sum_{k=N}^{\infty} \|A_k x_0\|^p < 1$. Выберем m так, чтобы $n_{m-1} + 1 \geqslant N$, $p_m > p$. Тогда для каждого $k \geqslant m$ $\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \|A_j x_0\|^{p_k} < 1$, откуда $\|B_k x_0\| < 1$, противоречие. Теорема доказана.

Замечание 2. (про ЛНП над $\mathbb{C}$) Определения и результаты работы переносятся на случай ЛНП над $\mathbb{C}$. В определении 0.1 числа $\varepsilon_k \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon_k| = 1$. Легко проверить, что каждое конечномерное пространство имеет M-котип 1, гильбертово пространство имеет M-котип 2. Если $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – измеримое пространство, то $X = L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ (комплексное) имеет M-котип $\max(2, p)$ (рассуждения на ст. 50-52 книги [1] верны и в комплексном случае). Теоремы 0.1,0.2 и лемма 0.1 верны без изменений формулировок.

Список литературы

[1] Mikhail I. Kadets, Vladimir M. Kadets, *Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence*, Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997

Киевский Национальный университет им. Т. Шевченко
E-mail address: ivanmath007@gmail.com